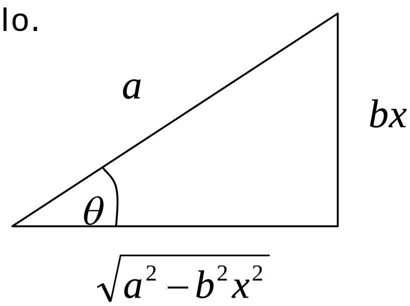
INTEGRACION POR SUSTITUCIONES TRIGONOMETRICAS

Algunas integrales donde aparecen en el integrando expresiones de la forma; $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$; $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$; $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$ se pueden llevar a integrales de fácil comprensión mediante algunas sustituciones trigonométricas. Para ello se debe tener en cuenta lo siguiente:

Si en la integral aparece una expresión de la forma:

Para la expresión	Usar	Para obtener
$\sqrt{a^2 - b^2x^2}$	$x = \frac{a}{b} Sen\theta$	$a\sqrt{1 - Sen^2\theta} = aCos\theta$

Sustitucion que sale del triangulo rectángulo.



Por EJEMPLO: Evaluar la integral

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx$$

Sea

$$x = 3Sen\theta \rightarrow dx = 3Cos\theta d\theta$$

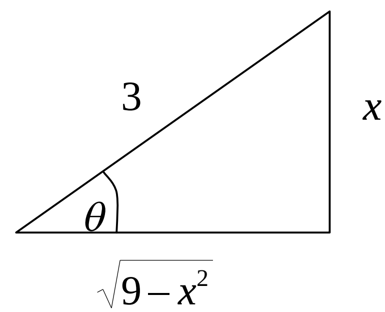
$$\sqrt{9 - x^2} = \left\{ \sqrt{9 - 9Sen^2\theta} = 3\sqrt{1 - Sen^2\theta} = 3\sqrt{Cos^2\theta} = 3Cos\theta \right.$$

Luego la integral se transforma en:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{3Cos\theta}{(3Sen\theta)^2}3Cos\theta d\theta = \int \frac{9Cos^2\theta}{9Sen^2\theta}d\theta$$

$$= \int Cot^2\theta d\theta = \int \left(Csc^2\theta - 1\right)d\theta$$

$$= -Cot\theta - \theta + C$$



Ahora , del triangulo se tiene:

$$Sen\theta = \frac{x}{3} \rightarrow \theta = Sen^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) \quad y \quad Cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

De donde la integral da como resultado:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - Sen^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

EJEMPLO- DETERMINE:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

$$x = 2Sen\theta \rightarrow dx = 2Cos\theta d\theta$$

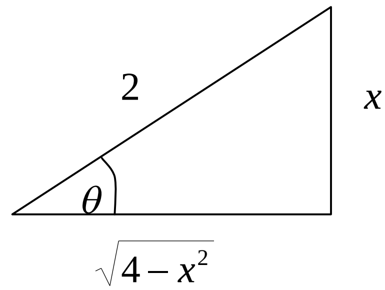
$$\sqrt{4-x^2} = \left\{\sqrt{4-4Sen^2\theta} = 2\sqrt{1-Sen^2\theta} = 2\sqrt{Cos^2\theta} = 2Cos\theta\right.$$

Luego la integral se transforma en:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2Cos\theta d\theta}{(2Sen\theta)^2(2Cos\theta)} = \int \frac{d\theta}{4Sen^2\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\int Csc^2\theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{4}Cot\theta + C$$



Ahora , del triangulo se tiene:

$$Cot\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

De donde la integral da como resultado:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$$

EJEMPLO- DETERMINE:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{15-2x-x^2}}$$ Factorizando el denominador.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{15+1-1-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16-(1+2x+x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16-(1+x)^2}}$$

Con el cambio de variable $U = x+1 \rightarrow dU = dx$, se tiene:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-(1+x)^2}} = \int \frac{dU}{\sqrt{16-U^2}}$$

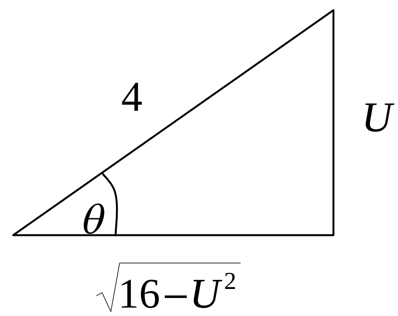
Ahora, Sea

$$U = 4Sen\theta \rightarrow dU = 4Cos\theta d\theta$$

$$\sqrt{16-U^2} = \left\{\sqrt{16-16Sen^2\theta} = 4\sqrt{1-Sen^2\theta} = 4\sqrt{Cos^2\theta} = 4Cos\theta\right.$$

Luego la integral se transforma en:

$$\int \frac{dU}{\sqrt{16-U^2}} = \int \frac{4Cos\theta d\theta}{(4Cos\theta)} = \int d\theta = \theta + C$$



Ahora , del triangulo se tiene:

$$Sen\theta = \frac{U}{4}$$

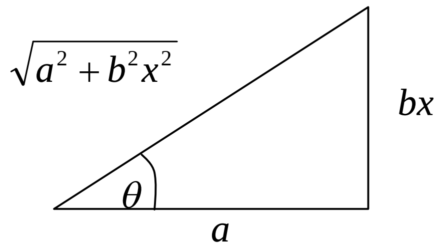
De donde la integral da como resultado:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{15-2x-x^2}} = Sen^{-1}\left(\frac{1+x}{4}\right) + C$$

Si en la integral aparece una expresión de la forma:

Para la expresión	Usar	Para obtener
$\sqrt{a^2+b^2x^2}$	$x = \frac{a}{b}Tan\theta$	$a\sqrt{1+Tan^2\theta} = aSec\theta$

Sustitucion que sale del triangulo rectángulo.



Por EJEMPLO: Evaluar la integral

$$\int \sqrt{9+4x^2}\,dx$$

Sea

$$x=\frac{3}{2}Tan\theta \rightarrow dx=\frac{3}{2}Sec^2\theta d\theta$$

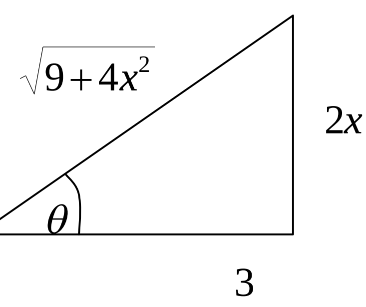
$$\sqrt{9+4x^2}=\left\{\sqrt{9+4\left(\frac{9}{4}Tan^2\theta\right)}=3\sqrt{1+Tan^2\theta}=3\sqrt{Sec^2\theta}=3Sec\theta\right.$$

Luego la integral se transforma en:

$$\int \sqrt{9+4x^2}\,dx=\int 3Sec\theta\left(\frac{3}{2}Sec^2\theta d\theta\right)=\frac{9}{2}\int Sec^3\theta d\theta$$

$$=\frac{9}{2}*\frac{1}{2}\left(Sec\theta Tan\theta+Ln\left|Sec\theta+Tan\theta\right|\right)+C$$

Ahora , del triangulo se tiene:



$$Tan\theta = \frac{2x}{3} \quad y \quad Sec\theta = \frac{\sqrt{9+4x^2}}{3}$$

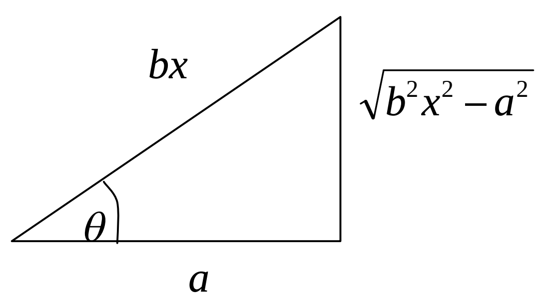
De donde la integral da como resultado:

$$\int \sqrt{9+4x^2}\,dx = \frac{9}{4}\left(\frac{2x\sqrt{9+4x^2}}{9} + Ln\left| \frac{\sqrt{9+4x^2}}{3} + \frac{2x}{3} \right| \right) + C$$

Si en la integral aparece una expresión de la forma:

Para la expresión	Usar	Para obtener
$\sqrt{b^2x^2 - a^2}$	$x = \frac{a}{b}Sec\theta$	$a\sqrt{Sec^2\theta - 1} = aTan\theta$

Sustitucion que sale del triangulo rectángulo.



Para evaluar la integral se debe identificar la expresión radical que aparece en el integrando y realizar la sustitución respectiva.

Por ejemplo.

$\int \sqrt{x^2 - 4}dx$, es una expresión de la forma $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$ donde b = 1 y a= 2,

luego la sustitución es: $x = \frac{2}{1}Sec\theta = 2Sec\theta$ derivando $dx = 2Sec\theta Tan\theta d\theta$

$$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{4Sec^2\theta - 4} = 2\sqrt{Sec^2\theta - 1} = 2\sqrt{Tan^2\theta} = 2Tan\theta$$

Luego la integral nos queda:

$$\int \sqrt{x^2 - 4}dx = \int 2Tan\theta\left(2Sec\theta Tan\theta d\theta\right) = \int 4Sec\theta Tan^2\theta d\theta$$

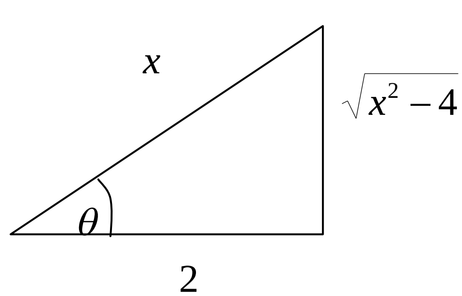
$$\int \sqrt{x^2 - 4}dx = 4\int Sec\theta Tan\theta Tan\theta d\theta$$

$$\int Sec\theta Tan^2\theta d\theta = \int \left(Sec\theta Tan\theta\right)Tan\theta d\theta = Tan\theta Sec\theta - \int Sec^3\theta d\theta$$

$$\int Sec\theta Tan^2\theta d\theta = Tan\theta Sec\theta - \left[\frac{1}{2}\left(Tan\theta Sec\theta + Ln\left|Sec\theta + Tan\theta\right|\right)\right] + C$$

$$\int Sec\theta Tan^2\theta d\theta = \frac{1}{2}Tan\theta Sec\theta - \left[\frac{1}{2}\left(Ln\left|Sec\theta + Tan\theta\right|\right)\right] + C$$

Ahora, del triangulo



$$Tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2} \quad y \quad Sec\theta = \frac{x}{2}$$ Luego:

$$\int \sqrt{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x\sqrt{x^2-4}}{4} - Ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right|\right) + C$$

Actividad: Encuentre las siguientes integrales:

A) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}$ B) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$ C) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

D) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}}$ E) $\int \frac{3xdx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ F) $\int \frac{dx}{\sqrt{16+6x-x^2}}$

G) $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx$ H) $\int \sqrt{x^2+9}dx$ I) $\int \sqrt{x^2-9}dx$